Rang d'une matrice – Cours et exercices

I — Définitions et premiers exemples

Définition 1. *Soient n et p deux entiers naturels non nuls, et $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. Le* ***rang de la matrice*** *A, noté $\mathrm{rg}(A)$ est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par ses p colonnes.*

Exemples

- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$
- Plus généralement $\mathrm{rg}(\mathrm{I}_n) = n$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 1$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} = 1$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ 2 \text{ si } \alpha \neq 0 \end{cases}$
- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 1$

Convention : *une fois pour toutes, indiquons que n et p désigneront dans ces lignes des entiers naturels non nuls.*

Le premier énoncé ci-dessous découle directement de la définition :

Propriété 1. *Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On a : $rg(A) \leqslant \min(n, p)$*

Preuve. Le rang est par définition la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$; donc inférieur ou égal à n. De plus, le rang est la dimension d'un sous-espace engendré par p éléments (les colonnes de la matrices) ; ce qui implique qu'il est inférieur ou égal à p. Donc $rg(A)$ est inférieur ou égal à n et à p, d'où la conclusion. $\square$

Le second découle à peine moins trivialement de la définition de rang.

Propriété 2. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a :*

1) $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$
2) $\mathrm{rg}(A) = n$ si et seulement si les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$.
3) $\mathrm{rg}(A) = n$ si et seulement si A est inversible.

Preuve. Le 1) est une conséquence de la propriété 1, appliquée au cas particulier d'une matrice carrée à n lignes (et donc n colonnes).
Pour le 2) : si le rang de la matrice est n, cela signifie que les n colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de A engendrent $\mathbb{K}^n$. La famille $\mathscr{F} = (C_1, \ldots, C_n)$ est donc génératrice de $\mathbb{K}^n$, et puisque son cardinal est n, c'est une base de $\mathbb{K}^n$. Réciproquement, si les n colonnes de $\mathbb{K}^n$ forment une base de $\mathbb{K}^n$, le sous espace engendré par ces colonnes est de dimension n (ça décoiffe !), ce qui signifie par définition que le rang de la matrice est n.
Pour le 3) : si le rang de A est n, il découle du point précédent que ses colonnes constituent une base de $\mathbb{K}^n$; notons $\mathscr{B}'$ cette base. La matrice A n'est autre que la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$, et elle est donc inversible, comme toute matrice de passage. Réciproquement, si A est inversible, alors tout n-uplet $V \in \mathbb{K}^n$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des C_i, puisque le système $AX = V$ admet une unique solution dans $\mathbb{K}^n$. Donc les colonnes de A constituent une base de $\mathbb{K}^n$, ce qui entraîne que le rang de A est n. $\square$

II — Matrices échelonnées

Définition 2. *Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. La matrice A est* ***échelonnée (en lignes)*** *si :*
- *toute ligne non nulle de A commence avec strictement plus de zéros que la ligne précédente ;*
- *en-dessous d'une ligne nulle, on ne peut trouver qu'une ligne nulle.*

Exemples

1) $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est échelonnée ;

2) $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée ;

3) $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée ;

4) $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée ;

5) $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée ;

6) $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est échelonnée ;

L'intérêt des matrices échelonnées est que le calcul de leur rang est particulièrement simple. Explicitement :

Propriété 3. *Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses lignes non nulles.*

Idée de la preuve. *Il découle de la définition de matrice échelonnée que k lignes non nulles correspondent à k vecteurs linéairement indépendants. S'en convaincre sur les exemples précédents est assez aisé ; la seule difficulté technique consiste donc à traduire en toute généralité cette idée...* □

III — Opérations élémentaires, matrices équivalentes

Définition 3. *Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, dont on note $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les lignes. On appelle :*
- ***permutation des lignes** L_i **et** L_j le fait d'échanger les lignes d'indice i et j dans la matrice A.*
- ***dilatation de la ligne** L_i le fait de remplacer la ligne L_i par $\lambda\, L_i$ (λ étant un scalaire non nul).*
- ***tranvection** l'opération consistant à remplacer une ligne L_i par une combinaison $L_i + \lambda\, L_j$ (λ étant un scalaire non nul).*

Enfin, on appelle ***opération élémentaire*** *sur (les lignes d') une matrice une des opérations citées ci-dessus.*

Remarques : *ces opérations élémentaires sont celles que vous utilisez déjà lorsque vous résolvez un système ou que vous inversez une matrice par la méthode du pivot de Gauss.*

La seconde remarque est que l'on peut définir de manière analogue des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Définition 4. *Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont* ***équivalentes*** *si l'on peut passer de A à B par une suite d'opérations élémentaires. Dans ce cas, on note : $A \sim B$.*

Exemples

➤ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est équivalente à $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (permutation de L_2 et L_3)

➤ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est équivalente à $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (dilatation de L_3 de facteur $1/2$)

➤ $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est équivalente à $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (transvection : on a remplacé L_2 par $L_2 - 2L_1$)

➤ $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est équivalente à $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (transvection : on a remplacé L_3 par $L_3 - L_1$)

➤ $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est équivalente à $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (permutation des colonnes C_2 et C_3)

Au final, les six matrices A_i sont deux à deux équivalentes. En particulier, A_1 et A_6 sont équivalentes. Et la matrice A_6 est échelonnée. Ce n'est pas un hasard puisque :

Propriété 4. *Toute matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est équivalente à une matrice échelonnée.*

Idée de la preuve. *La preuve repose sur le même principe que celle du pivot de Gauss. Elle consiste à décrire l'algorithme permettant de faire apparaître des zéros dans chaque colonne de la matrice A pour se ramener à une matrice triangulaire supérieure (lorsque la matrice initiale est carrée) ou simplement échelonnée (dans le cas général).* $\square$

Le temps est venu d'énoncer le résultat le plus important pour le calcul pratique du rang :

Théorème. *Deux matrices équivalentes ont même rang.*

Idée de la preuve. *Briques élémentaires de cette démo : premièrement, le rang (d'une application linéaire) est invariant par composition avec un isomorphisme. Deuxièmement, le produit de deux matrices correspond à la composition des applications linéaires représentées par ces matrices. Enfin, les opérations élémentaires correspondent à des produits matriciels particuliers.* $\square$

Remarque : des trois "briques" évoquées ci-dessus, la dernière mérite que l'on s'y attarde un peu, puisque c'est la seule qui n'est pas intervenue jusqu'à présent dans le cours d'algèbre linéaire. C'est l'objet du paragraphe ci-dessous.

IV — Matrices associées aux opérations élémentaires : remarques informelles

On se propose d'illustrer par des exemples la correspondance entre les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice, et des produits matriciels particuliers.

➤ *Permutation de deux lignes ou de deux colonnes* : on part de la matrice identité $\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En permutant sa deuxième ligne et sa quatrième ligne, on obtient une matrice que nous noterons $P_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En faisant les produits (à gauche et à droite) d'une matrice M quelconque de $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ par P_{24} on obtient :

$$P_{24}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & A & B \\ C & D & E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ C & D & E & F \\ 8 & 9 & A & B \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$MP_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & A & B \\ C & D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 5 \\ 8 & B & A & 9 \\ C & F & E & D \end{pmatrix}$$

En résumé, multiplier à gauche (*resp.* à droite) la matrice M par P_{24} permet de permuter les deuxième et quatrième lignes (*resp.* colonnes) de la matrice M (ce qui justifie que l'on dise de P_{24} que c'est une **matrice de permutation**). Comme vous vous en doutez probablement, la preuve dans le cas général de cette affirmation n'est pas conceptuellement compliquée, mais techniquement peu agréable à rédiger (il faut aimer naviguer avec les indices).

➤ *Dilatation d'une ligne ou d'une colonne* : on part de la matrice identité $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En remplaçant sur sa dernière ligne le 1 par λ (où $\lambda \in \mathbb{K}^*$) on obtient une matrice que nous noterons $D_{3\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En faisant les produits (à gauche et à droite) d'une matrice M quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ par $D_{3\lambda}$ on obtient :

$$D_{3\lambda}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6\lambda & 7\lambda & 8\lambda \end{pmatrix}$$

$$MD_{3\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\lambda \\ 3 & 4 & 5\lambda \\ 6 & 7 & 8\lambda \end{pmatrix}$$

En résumé, multiplier à gauche (*resp.* à droite) la matrice M par $D_{3\lambda}$ permet de multiplier par λ la troisième ligne (*resp.* colonne) de la matrice M. C'est pourquoi on dit de $D_{3\lambda}$ que c'est une **matrice de dilatation**.

➤ *Transvection* : on part de la matrice identité $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En remplaçant sur sa deuxième ligne le troisième coefficient par λ (où $\lambda \in \mathbb{K}^*$) on obtient une matrice que nous noterons $T_{23\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En faisant les produits (à gauche et à droite) d'une matrice M quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ par $T_{23\lambda}$ on obtient :

$$T_{23\lambda}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+\lambda g & e+\lambda h & f+\lambda i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$MT_{23\lambda} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c+\lambda b \\ d & e & f+\lambda e \\ g & h & i+\lambda h \end{pmatrix}$$

En résumé, multiplier à gauche la matrice M par $T_{23\lambda}$ permet de remplacer la deuxième ligne (L_2) de la matrice M par la combinaison $L_2 + \lambda L_3$. Et multiplier à droite la matrice M par $T_{23\lambda}$ permet de remplacer la troisième colonne (C_3) de la matrice M par la combinaison $C_3 + \lambda C_2$. C'est pourquoi on dit de $T_{23\lambda}$ que c'est une **matrice de transvection**.

Propriété 5. *Toute matrice de permutation, de dilatation ou de transvection est inversible. Plus précisément :*
- *Si P_{ij} est une matrice de permutation, alors P_{ij} est sa propre inverse : $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$*
- *Si $D_{i\lambda}$ est une matrice de dilatation, alors : $D_{i\lambda}^{-1} = D_{i\frac{1}{\lambda}}$*
- *Si $T_{ij\lambda}$ est une matrice de dilatation, alors : $T_{ij\lambda}^{-1} = T_{ij(-\lambda)}$*

Idée de la preuve. *On écrit rigoureusement ce que représentent les notations utilisées dans l'énoncé, puis on vérifie que le produit de chaque matrice avec l'inverse proposé dans la propriété donne effectivement l'identité.* □

V — Calcul explicite du rang d'une matrice

Grâce aux résultats précédents cette méthode est d'une simplicité déconcertante :

Méthode pratique de calcul du rang. On considère A une matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

- Etape 1 : on cherche une matrice échelonnée E telle que $A \sim E$.
- Etape 2 : le rang de A est alors le nombre de lignes non nulles de E.

Remarque : *une autre méthode consiste à calculer le rang via le cardinal d'une base la dimension du sev engendré par les colonnes de la matrice. Cette méthode est en général plus longue.*

Avant de passer aux exercices, faisons un rapide tour d'horizon de vos connaissances sur le rang.

VI — Propriétés du rang (catalogue)

Synthèse des propriétés du rang.

1) *Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors : $rg(A) = rg(f)$ où $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ désigne l'application linéaire canoniquement associée à A.*

2) *Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On a : $rg(A) \leqslant \min(n,p)$.*

3) *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $rg(A) \leqslant n$, et $rg(A) = n$ SSI A inversible SSI les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$.*

4) *Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses lignes non nulles.*

5) *Toute matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est équivalente à une matrice échelonnée.*

6) *Deux matrices équivalentes ont même rang.*

7) *Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. Si $B \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $rg(BA) = rg(A)$; et si $C \in GL_p(\mathbb{K})$, alors $rg(AC) = rg(A)$.*

8) *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $rg\left(P^{-1}AP\right) = rg(A)$.*

9) *Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors $rg(A) = rg\left({}^tA\right)$.*

VII — Exercice

Calculer le rang des matrices suivantes :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8) $A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$

9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

11) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

12) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

13) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

14) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ (avec α et β complexes)

15) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix}$

17) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

18) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

19) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \\ a+1 & a^2 \end{pmatrix}$

20) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \\ a & a \end{pmatrix}$

21) $A = \begin{pmatrix} a & b-c \\ c & a \\ b+c & -a \end{pmatrix}$